Руководство к библиотеке "GenRel.m".

Данная библиотека содержит полный набор операций на языке Wolfram Mathematica для работы с математическим аппаратом обшей теории относительности.
Для ее использование нужно сначала интегрировать ее в программу командой:

```
Get["%disk name%:\\%full directory%\\GenRel.m"]
```

или просто:

```
<< %disk name%:\\%full directory%\\GenRel.m
```

Можно также разместить файл GenRel.m в следующую директорию: C:\Users\%username%\AppData\Roaming\Mathematica\Applications\ и вызывать ее просто:

```
Get["GenRel.m"]
```

или

```
<< GenRel.m
```

После этого должны появиться следующие строки :

```
"GenRel functions are: IMetric, Christoffel, ChristoffelCmp, RiemannCmp,
  Riemann, Ricci, SCurvature, EinsteinTensor, SqRicci, SqRiemann."
```

```
Enter 'helpGenRel' for this list of functions
```

Здесь указаны функции, которыми можно пользоваться в библиотеке. В самом начале нужно ввести систему координат , через которое мы рассматриваем поле, к примеру в случае сферических координат :

```
coord = {t, r, θ, ϕ};
```

Вообще говоря, обозначение coord не обязательно, а лишь для того, чтобы везде не писать этот массив {*, *, *, *}.
Далее определяется метрика - квадратная матрица n×n (в нашем примере 4×4) содержащая компоненты тензора метрики $g_{\mu\upsilon}$:

```
metric={{-1,0,0,0},{0,1,0,0},{0,0,1,0},{0,0,0,1}};
```

Или короче для диагональной матрицы :

```
metric=DiagonalMatrix[{-1,1,1,1}];
```

Опять же обозначение metric не играет никакой роли.

Далее введя систему координат и в них указав метрический тензор, с помощью функций в библиотеке можно вычислить разного рода параметры и характеристики поля.

- обратный метрический тензор $g^{\mu\upsilon}$:

```
IMetric[metric]
```

- символ Кристоффеля в виде массива $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\upsilon}$:

```
Christoffel[metric,coord]
```

- ненулевые компоненты символа Кристоффеля в виде $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\upsilon} = \Gamma[\lambda, \mu, \upsilon]$:

```
ChristoffelCmp[metric,coord]
```

- ненулевые компоненты тензора Римана в виде $R^{\lambda}{}_{\mu\upsilon\chi} = R[\lambda, \mu, \upsilon, \chi]$:

```
RiemannCmp[metric,coord]
```

- тензор Римана в виде массива $R^{\lambda}{}_{\mu\upsilon\chi}$:

```
Riemann[metric, coord]
```

- тензор Риччи в виде массива $R_{\mu\chi} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\chi}$:

```
Ricci[metric,coord]
```

- скалярная кривизна $R = g^{\mu\chi} R_{\mu\chi}$:

```
SCurvature[metric,coord]
```

- тензор Эйнштейна $G_{\mu\upsilon}=\mathbf{R}_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}\, \mathbf{g}_{\mu\upsilon}\, \mathbf{R}$:

```
EinsteinTensor[metric,coord]
```

- квадрат нормы тензора Риччи :

```
SqRicci[metric,coord]
```

- квадрат нормы тензора Римана :

```
SqRiemann[metric,coord]
```

Пример

В качестве примера давайте рассмотрим известную метрику Робертсона - Уокера для однородной изотропной вселенной (в сферических координатах) :

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - a\,(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - k\, r^2} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\right]$$

Сначала внесем нашу библиотеку в программу, введем систему координат и зададим тензор метрики, который в данном случае является диагональным :

```
<< GenRel.m
sph={t,r,θ,ϕ};
met=DiagonalMatrix[{c^2,a[t]^2/(1-k r^2),a[t]^2 r^2,a[t]^2 r^2 Sin[θ]^2}];
(*a[t] - скалярный фактор, k - параметр кривизны пространства*)
```

```
met // MatrixForm (*посмотрим на нашу метрику в матричном виде*)
```

$$\begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a[t]^2}{1-k\, r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\, a[t]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\, a[t]^2\, \mathrm{Sin}[\theta]^2 \end{pmatrix}$$

Теперь легко можно получить к примеру символ Кристоффеля для данной метрики (получим ненулевые компоненты):

```
ChristoffelCmp[met,sph]
(*при введении просто Christoffel[met,sph] программа выдаст
все компоненты символа Кристоффеля в виде массива*)
```

$\Gamma[1,2,2]=\dfrac{a[t]\, a'[t]}{c^2 \left(-1+k\, r^2\right)}$

$\Gamma[1,3,3]=-\dfrac{r^2\, a[t]\, a'[t]}{c^2}$

$\Gamma[1,4,4]=-\dfrac{r^2\, a[t]\, \mathrm{Sin}[\theta]^2\, a'[t]}{c^2}$

$\Gamma[2,1,2]=\dfrac{a'[t]}{a[t]}$

$\Gamma[2,2,1]=\dfrac{a'[t]}{a[t]}$

$\Gamma[2,2,2]=\dfrac{k\, r}{1-k\, r^2}$

$\Gamma[2,3,3]=r\left(-1+k\, r^2\right)$

$\Gamma[2,4,4]=r\left(-1+k\, r^2\right) \mathrm{Sin}[\theta]^2$

$\Gamma[3,1,3]=\dfrac{a'[t]}{a[t]}$

$\Gamma[3,2,3]=\dfrac{1}{r}$

$\Gamma[3,3,1]=\dfrac{a'[t]}{a[t]}$

$\Gamma[3,3,2]=\dfrac{1}{r}$

$\Gamma[3,4,4]=-\mathrm{Cos}[\theta]\, \mathrm{Sin}[\theta]$

$\Gamma[4,1,4]=\dfrac{a'[t]}{a[t]}$

$\Gamma[4,2,4]=\dfrac{1}{r}$

$\Gamma[4,3,4]=\mathrm{Cot}[\theta]$

$\Gamma[4,4,1]=\dfrac{a'[t]}{a[t]}$

$\Gamma[4,4,2]=\dfrac{1}{r}$

$\Gamma[4,4,3]=\mathrm{Cot}[\theta]$

Также легко получить тензор Риччи в виде матрицы а также скалярную кривизну :

```
Ricci[met,sph]//MatrixForm
SCurvature[met,sph]//Expand
(*команда Expand лишь разделяет дробь, чтобы было нагляднее*)
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{3\,a''[t]}{a[t]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2\,c^2\,k+2\,a'[t]^2+a[t]\,a''[t]}{c^2\,(-1+k\,r^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2\,(2\,c^2\,k-2\,a'[t]^2-a[t]\,a''[t])}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r^2\,\mathrm{Sin}[\theta]^2\,(2\,c^2\,k-2\,a'[t]^2-a[t]\,a''[t])}{c^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{6\,k}{a[t]^2} - \frac{6\,a'[t]^2}{c^2\,a[t]^2} - \frac{6\,a''[t]}{c^2\,a[t]}$$

Можно повторить те же действия для метрики Шварцшильда оставив прежними координаты :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2\,dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(\sin^2\theta\,d\phi^2 + d\theta^2\right)$$

```
metsch=DiagonalMatrix[{c^2(1-R/r),(1-R/r)^-1,r^2,r^2 Sin[θ]^2}];
(*R=2GM/c² - гравитационный радиус тела*)
```

Найдем компоненты символа Кристоффеля, а также убедимся, что при данной метрике тензор Риччи нулевой :

```
ChristoffelCmp[metsch,sph]
Print["Rμυ="MatrixForm[Ricci[metsch,sph]]]
```

$\Gamma[1,1,2]=\frac{R}{2\,r^2-2\,r\,R}$

$\Gamma[1,2,1]=\frac{R}{2\,r^2-2\,r\,R}$

$\Gamma[2,1,1]=-\frac{c^2\,(r-R)\,R}{2\,r^3}$

$\Gamma[2,2,2]=-\frac{R}{2\,r^2-2\,r\,R}$

$\Gamma[2,3,3]=-r+R$

$\Gamma[2,4,4]=-(r-R)\,\mathrm{Sin}[\theta]^2$

$\Gamma[3,2,3]=\frac{1}{r}$

$\Gamma[3,3,2]=\frac{1}{r}$

$\Gamma[3,4,4]=-\mathrm{Cos}[\theta]\,\mathrm{Sin}[\theta]$

$\Gamma[4,2,4]=\frac{1}{r}$

$\Gamma[4,3,4]=\mathrm{Cot}[\theta]$

$\Gamma[4,4,2]=\frac{1}{r}$

$$R_{\mu\upsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Примечание

Набирая helpGenRel можно посмотреть список функций, а набирая ?%имя функции% (например ?Christoffel) можно увидеть, что именно выводит функция.

Греческие буквы можно вводить используя запись: “Esc”+“**”+“Esc” без кавычек и плюсов. Например при вводе “Esc a Esc” (без пробелов), программа напишет “α”, или при вводе “Esc chi Esc”, получим “χ”.

Очень часто ответ может быть показан в не совсем удобной форме - не упрощено выражение, или же неудобно читать множество фигурных скобочек {{*}, {*} ...} и т. д.

Для этого можно воспользоваться функциями Simplify[], которая упрощает выражения, приводит к более короткой форме методом тождественных преобразований, и MatrixForm[] - выводит массив в виде матрицы.

Пример:

```
{{-1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}}
```

```
MatrixForm[{{-1,0,0,0},{0,1,0,0},{0,0,1,0},{0,0,0,1}}]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

или короче :

```
{{-1,0,0,0},{0,1,0,0},{0,0,1,0},{0,0,0,1}}//MatrixForm
```

Или же:

```
DiagonalMatrix[{x^2+1+2x,x-3,x^2+1-2x}]//MatrixForm//Simplify
```

$$\begin{pmatrix} (1+x)^2 & 0 & 0 \\ 0 & -3+x & 0 \\ 0 & 0 & (-1+x)^2 \end{pmatrix}$$